

Einfluß des Lewisschen Koeffizienten auf das Ausfrieren von Dämpfen aus Gas-Dampf-Gemischen

Von H. HAUSEN, Höllriegelskreuth b. München

Bei Abkühlung unter den Gefrierpunkt scheiden sich Dämpfe entweder nur an der Rohroberfläche als feste oder lockere Reifschicht oder teilweise auch im Gasstrom selbst als Nebel oder Schnee aus. Im folgenden wird gezeigt, daß die Wärmeleitzahl und Diffusionszahl des Stoffpaars und die damit in Zusammenhang stehenden Werte der Wärmeübergangszahl und der Stoffaustauschzahl einen wesentlichen Einfluß auf die Art des Ausscheidens haben. Diesen Einfluß kann man durch den Lewisschen Koeffizienten, der sich als das Verhältnis der Geschwindigkeiten des Wärme- und Stoffaustausches deuten läßt, übersichtlich ausdrücken und näherungsweise auch theoretisch erfassen. Versuche bestätigen weitgehend die theoretischen Folgerungen, wenn auch eine vollständige Erklärung aller Beobachtungen vorerst nicht möglich ist.

Einleitung

Beobachtungen von *Hilz*¹⁾ haben über das Ausfrieren von Dämpfen im wesentlichen zu folgender Ansicht geführt: Bei turbulenter Strömung scheiden sich die Dämpfe nur an der gekühlten Rohroberfläche als ziemlich glatte und feste Reifschicht aus. Bei laminarer Strömung hingegen fällt im ganzen Rohrquerschnitt Schnee aus; er bleibt zum Teil an der Wand haften, und zwar so locker, daß Teile des Belages von Zeit zu Zeit abbröckeln. Dieses Schneien im Innern des Rohres konnte *Hilz* mit seiner ersten Versuchseinrichtung nur bei Benzol-Stickstoff-Gemischen und bei Wasserdampf-Wasserstoff-Gemischen beobachten, während Wasserdampf-Luft-Gemische sich auch im laminaren Gebiet im wesentlichen ebenso verhielten wie im turbulenten.

Wenngleich die Unterschiede im Verhalten der verschiedenen Gemische bei der zweiten und dritten Versuchseinrichtung von *Hilz* nicht mehr so deutlich hervortreten wie bei der ersten, so deuten sie doch darauf hin, daß die Art des Ausscheidens nicht allein vom Strömungszustand abhängt. *Hilz* vermutete, daß hierbei auch die Gestalt und Krümmung der Rohrwand, der Staubgehalt des Gemisches und andere unbekannte Einflüsse eine Rolle spielen.

Im folgenden wird gezeigt, daß die physikalischen Eigenschaften des Stoffpaars die Art des Ausscheidens beeinflussen. Dieser Einfluß läßt sich weitgehend durch den Lewisschen Koeffizienten erfassen. Wenngleich voraussichtlich auch noch andere Gesichtspunkte eine Rolle spielen, so lassen sich doch auf diese Weise zum mindesten die Erscheinungen, die *Hilz* an seiner ersten Apparatur beobachtet hat und die ihm zum Teil widerspruchsvoll erschienen sind, zwangsläufig erklären.

Physikalische Bedeutung des Lewisschen Koeffizienten Geschwindigkeit des Wärme- und Stoff-Austausches

Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht die Frage: Treten die festen Ausscheidungen nur unmittelbar an der Rohrwand auf oder finden gleichzeitig im gesamten Strömungsquerschnitt des sich abkühlenden Gases Ausscheidungen statt? Hierauf kann man folgende Antwort geben: Bleibt an allen Stellen des Querschnitts das Gas an dem kondensierenden Bestandteil gerade gesättigt oder enthält es überall weniger von diesem Bestandteil, als der Sättigung entspricht, dann können nur an der Rohrwand feste Ausscheidungen auftreten. Ist aber das Gas übersättigt, dann können grundsätzlich im gesamten Querschnitt Ausscheidungen in Form von Nebel oder Schnee auftreten, sofern genügend Kondensationskerne vorhanden sind^{1a)}. Da in diesem Falle der Wandbelag vermutlich nicht nur aus Teilchen gebildet wird, die vollständig zur Rohrwand gelangen, sondern zum Teil auch aus solchen, die sich in geringer Entfernung von der Rohrwand ausscheiden, ist ein weniger dichter, verhältnismäßig lockerer Belag zu erwarten, der leicht abbröckelt.

Ob Untersättigung, Sättigung oder Übersättigung auftritt, hängt vom Verhältnis der Geschwindigkeit des Stofftransports zur Geschwindigkeit des Wärmetransportes aus dem Innern des Gases nach der Rohrwand hin ab. Ist die Geschwindigkeit des Stofftransports groß im Verhältnis zum Wärmetransport, dann

¹⁾ R. Hilz, Verschiedene Arten des Ausfrierens einer Komponente aus binären, strömenden Gasgemischen. Z. ges. Kälteind. 47, 34/37, 74/78, 88/92 [1940].

^{1a)} In Abwesenheit von Kondensationskerne scheidet sich in Wasserdampf-Luft-Gemischen Nebel oder Schnee erst aus, w. m. n. der Wasserdampfdruck den 3 bis 8fachen Wert d. Sättigungsdrucks erreicht; vgl. A. Sander u. G. Damköhler, Übersättigung bei der spontanen Keimbildung in Wasserdampf. Die Naturwissenschaften 37, 460 ff [1943].

enthält das Gas in jedem Augenblick nur noch so wenig von dem kondensierenden Bestandteil, daß das Gas im gesamten Querschnitt untersättigt ist. Umgekehrt wird das Gas um so mehr übersättigt sein, je langsamer der Stofftransport im Vergleich zum Wärmetransport vor sich geht.

Wir können uns leicht klarmachen, daß dieses Geschwindigkeitsverhältnis bei laminarer und turbulenter Strömung im allgemeinen verschieden ist. Denn bei laminarer Strömung findet ein rein molekularer Stoff- und Wärmetransport statt. Hierbei ist für den Wärmetransport die Wärmeleitzahl λ bzw. die Temperaturleitzahl $a = \lambda / \gamma c_p$ maßgebend, wobei γ das spezifische Gewicht (Wichte), c_p die spezifische Wärme des Gas-Dampf-Gemisches bedeutet. Den Stoffaustausch bestimmt die Diffusionszahl D . Bei laminarer Strömung muß hiernach das Verhältnis a/D eine wesentliche Rolle spielen. Ist hingegen die Turbulenz so stark, daß man die sehr dünne laminare Grenzschicht an der Rohrwand vernachlässigen kann, dann werden beide Arten des Transportes durch eine molare Mischbewegung bewirkt, d. h. durch die Bewegung der Turbulenzballen, die gleichzeitig und daher auch mit gleicher Geschwindigkeit Wärme und Stoff transportieren. Wir haben dann den Grenzfall gleicher Geschwindigkeit des Wärme- und Stofftransportes vor uns.

Zahlenmäßig ist, wie gezeigt werden soll, das Geschwindigkeitsverhältnis von Wärme- und Stoff-Transport durch den Lewisschen Koeffizienten bestimmt. Mit seiner Hilfe werden wir daher entscheiden können, ob Untersättigung, Sättigung oder Übersättigung vorliegt.

Begriff des Lewisschen Koeffizienten

Für die an einer Fläche dF in der Zeiteinheit übergehende Wärmemenge gilt bekanntlich

$$dQ = \alpha (t_0 - t_w) dF \quad (1),$$

wenn α die Wärmeübergangszahl, t_w die Wandtemperatur und t_0 die Gastemperatur in größerer Entfernung von der Wand bedeuten. Entsprechend kann auch der Stoffaustausch ausgedrückt werden durch eine Stoffaustauschzahl σ mit Hilfe der Gleichung

$$dN = \sigma (c_0 - c_w) dF \quad (2).$$

Hierin ist N die in der Zeiteinheit ausgetauschte Stoffmenge (z. B. in kmol/h), c_w und c_0 sind die Konzentrationen (z. B. in kmol/m³) des diffundierenden Stoffes an der Wand bzw. in größerer Entfernung von der Wand.

Es liegt nahe, das Verhältnis α/σ der in Gl. (1) und (2) auftretenden Wärmeübergangszahl und Stoffaustauschzahl unmittelbar als Maß für das Verhältnis der Geschwindigkeiten des Wärme- und Stoffaustausches zu wählen. Nachstehende Gründe zeigen aber, daß es zweckmäßig ist, dieses Maß ein wenig anders festzulegen.

In dem schon erwähnten Grenzfall der reinen Turbulenz sind die Geschwindigkeiten des Wärmeaustausches und Stoffaustausches einander gleich, ihr Verhältnis hat also den Wert 1. Wir wollen daher fordern, daß das festzulegende Maß für das Geschwindigkeitsverhältnis im Grenzfall der reinen Turbulenz ebenfalls den Wert 1 annimmt. Nun hat aber *Lewis*²⁾ und später auf etwas anderem Wege *Merkel*³⁾ für diesen Grenzfall das Gesetz abgeleitet

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \gamma c_p \quad (\text{Lewissches Gesetz}) \quad (3),$$

²⁾ W. K. Lewis, The evaporation of a liquid into a gas. Mech. Engng. 44, 445 [1922].

³⁾ Fr. Merkel: Verdunstungskühlung, VDI-Forschungsheft 275, Berlin 1925. Vgl. a. Fr. Bošnjakowit: Technische Thermodynamik II. Teil, Th. Steinkopff, Dresden und Leipzig 1937, S. 45.

worin sich γ und c_p auf das Gas-Dampf-Gemisch beziehen. Bilden wir daher den dimensionslosen Ausdruck

$$\epsilon = \frac{\alpha}{\gamma c_p}, \quad (4)$$

den wir *Lewisschen Koeffizienten* nennen wollen, dann erkennen wir sofort, daß dieser entsprechend unserer Forderung gerade im Grenzfall der reinen Turbulenz den Wert 1 annimmt. In diesem *Lewisschen Koeffizienten* kommt also die Geschwindigkeit des Wärmeaustausches nicht durch α selbst, sondern durch $\frac{\alpha}{\gamma c_p}$ zum Ausdruck. Dies steht damit in Übereinstimmung, daß auch bei der reinen Wärmeleitung für die Geschwindigkeit der Wärmeausbreitung nicht die Wärmeleitzahl λ , sondern die Temperaturleitzahl $a = \lambda / \gamma c_p$ maßgebend ist. ϵ erscheint hiernach in besonderem Maße geeignet, als Maß für das Verhältnis der beiden Transportgeschwindigkeiten zu dienen.

Der Lewissche Koeffizient als Unterscheidungsmerkmal für den Grad der Sättigung

Um zu erkennen, in welcher Art der *Lewissche Koeffizient* das Auftreten der Untersättigung, Sättigung oder Übersättigung und damit auch die Möglichkeit von Reif- und Schneebildung bestimmt, wollen wir zunächst untersuchen, was sein Wert über den Verlauf der Konzentration des kondensierenden Dampfes innerhalb eines Strömungsquerschnittes auszusagen vermag.

Wir betrachten ein kurzes Rohrstück mit der Heizfläche $d f_o$, worin sich das strömende Gas-Dampf-Gemisch im Mittel um dt , abkühlt und die Konzentration des Dampfes um dc_o abnimmt. Ist G die in der Zeiteinheit strömende Menge des Gemisches, also G/γ das Volumen, dann gilt nach Gl. (1) und (2) für den Wärme- und Stoffaustausch

$$dQ = -G c_p d t_o = \alpha (t_o - t_w) d f \quad (5)$$

und

$$dN = -\frac{G}{\gamma} dc_o = \sigma (c_o - c_w) d f \quad (6).$$

Wir wollen nun den Temperaturunterschied $t_o - t_w$ so klein voraussetzen, daß wir zwischen t_o und t_w genau genug die Sättigungskonzentration c'' als linear abhängig von der Temperatur t betrachten dürfen; d. h. wir wollen in dem fraglichen Temperaturbereich

$$\frac{dc''}{dt} = \text{const} \quad (7)$$

setzen. Weiter wollen wir annehmen, daß an der Rohrwand bzw. an der Oberfläche der auf ihr sich bildenden Reifsicht stets gerade Sättigung besteht. Dann können wir

$$c_w = c_{w''} \quad (8)$$

schreiben. Hiermit folgt aus Gl. (5) und (6)

$$\frac{c_o - c_{w''}}{t_o - t_w} = \frac{\alpha}{\sigma \gamma c_p} \frac{dc_o}{dt_o} = \epsilon \frac{dc_o}{dt_o} \quad (9).$$

Wir stellen zunächst die Frage, wie groß der *Lewissche Koeffizient* ist, wenn auch c_o gerade der Sättigungskonzentration c_o'' bei der Temperatur t_o entspricht, d. h., wenn das Gas an allen Stellen des Rohrquerschnittes gerade an dem Dampf gesättigt ist. Mit $c_o = c_o''$ erhalten wir zunächst aus Gl. (9)

$$\frac{c_o'' - c_{w''}}{t_o - t_w} = \epsilon \frac{dc_o''}{dt_o} \quad (10).$$

Für die Sättigungskonzentration c_o'' gilt außerdem wegen der linearen Abhängigkeit von c'' von t , d. h. wegen Gl. (7),

$$\frac{c_o'' - c_{w''}}{t_o - t_w} = \frac{dc''}{dt} \quad (11).$$

Da ferner im vorliegenden Falle $\frac{dc_o}{dt_o} = \frac{dc_o''}{dt_o} = \frac{dc''}{dt}$ sein muß, folgt durch Vergleich von Gl. (10) und (11)

$$\epsilon = 1 \quad (12).$$

Ist also das Gas im Innern des Rohrquerschnittes gesättigt, dann hat der *Lewissche Koeffizient* den Wert 1. Wir können aber auch umgekehrt schließen: Hat der *Lewissche Koeffizient* den Wert 1, dann ist auch im Innern des Rohres das Gas an dem kondensierenden Bestandteil gerade gesättigt.

Ist ϵ von 1 verschieden, dann muß dc_o/dt_o in erster Näherung denselben Wert wie im betrachteten Fall haben, weil ja die je Temperaturgrad sich ausscheidende Menge im wesentlichen die-

selbe bleiben muß. Es muß also nach wie vor in erster Näherung gelten

$$\frac{dc_o}{dt_o} = \frac{dc''}{dt} \quad (13).$$

Aber der Absolutwert von c_o ist jetzt im allgemeinen von dem Sättigungswert c_o'' verschieden. Da ferner Gl. (11) bei kleinen Temperaturunterschieden allgemein anwendbar bleibt, erhalten wir, indem wir $\frac{dc_o}{dt_o} = \frac{dc''}{dt}$ aus Gl. (11) in Gl. (9) einsetzen:

$$c_o - c_{w''} = \epsilon (c_o'' - c_w'') \quad (14).$$

Diese Gleichung besagt: Der Unterschied zwischen der Konzentration c_o im Innern des Gases und der Konzentration c_w'' an der Rohrwand ist stets ϵ -mal so groß wie der Konzentrationsunterschied $c_o'' - c_w''$ bei durchweg gesättigtem Gas. Zeichnen wir den Temperaturverlauf in einem bestimmten Rohrquerschnitt und daneben den entsprechenden Konzentrationsverlauf in solchem Maßstab auf, daß beide Kurven bei Sättigung sich decken, dann erhalten wir die in Bild 1 dargestellten Verhältnisse.

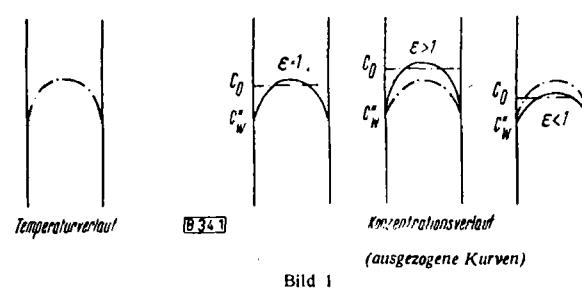


Bild 1
Temperatur- und Konzentrationsverlauf bei verschiedenen Werten von ϵ .

Bei $\epsilon > 1$ enthält das Gas im Innern des Rohres stets mehr von dem kondensierbaren Bestandteil als der Sättigung entspricht. Die Konzentrationerniedrigung hinkt der Temperaturniedrigung, die das Gas beim Weiterströmen erleidet, nach, weil bei $\epsilon > 1$ die Stoffaustauschzahl σ gegenüber α zu klein ist, um den kondensierenden Stoff schnell genug an die Wand zu schaffen. Sind nun genügend Kondensationskerne im Gas enthalten, dann wird sich der übersättigte Dampf zu einem großen Teil im Innern des Gases, und zwar besonders stark in der Rohrmitte, ausscheiden; es wird im Innern des Rohres sich Nebel oder Schnee bilden.

Bei $\epsilon < 1$ enthält hingegen das Gas im Innern der Rohre stets weniger von dem kondensierenden Bestandteil als der Sättigung entspricht. σ ist stets so groß, daß die gesamte kondensierende Dampfmenge rasch genug an die Wand befördert werden kann. In diesem Falle kann also nur an der Wand selbst eine Ausscheidung auftreten. Dies gilt auch gerade noch bei $\epsilon = 1$.

Sofern indessen bei einer Überschreitung von $\epsilon = 1$ infolge Mangels an Kondensationskernen Übersättigung sich aufrechterhalten kann, kann auch in diesem Falle die Abscheidung allein an der Rohrwand vor sich gehen.

Wir gelangen somit zu dem wichtigen Ergebnis: Nebel oder Schnee kann im Rohrinnern nur auftreten bei $\epsilon > 1$, wenn genügend Kondensationskerne vorhanden sind. Bei $\epsilon \leq 1$ ist hingegen nur eine Abscheidung an der Rohrwand in Form einer ziemlich festen und glatten Reifsicht möglich.

Im folgenden soll auf Grund der Impulstheorie, der Grenzschichttheorie und der Ähnlichkeitstheorie untersucht werden, welche Werte des *Lewisschen Koeffizienten* unter verschiedenen Verhältnissen zu erwarten sind und welche Folgerungen hieraus über die Art des Ausscheidens gezogen werden können.

Es sei noch hervorgehoben, daß die bisher gewonnenen Ergebnisse streng nur unter den Voraussetzungen gelten, daß 1. die Temperaturunterschiede zwischen Gas und Rohrwand so klein sind, daß man in ihrem Bereich die Dampfdruckkurve durch ihre Tangente ersetzen kann, und daß 2. das Gas an der Oberfläche der auf der Rohrwand sich niederschlagenden Reifsicht stets gerade gesättigt ist. Falls diese Bedingungen nicht hinreichend erfüllt sind, ist eine besondere eingehende Untersuchung erforderlich⁴⁾. Wäre z. B. das Gas an der Oberfläche etwas übersättigt, dann würde bei $\epsilon < 1$ in einer wandnahen Schicht Übersättigung, im übrigen mittleren Bereich aber Untersättigung auftreten.

Der Lewissche Koeffizient bei verschiedenen Gemischen und Strömungszuständen

Impulstheorie

Wir wollen mit Hilfe der Impulstheorie im Anschluß an Überlegungen von Nusselt⁶⁾ zunächst nachweisen, daß im Falle der reinen Turbulenz das Lewissche Gesetz gilt. Wie schon erwähnt, kommt bei der reinen Turbulenz der Wärmetransport und Stofftransport allein durch das Vermischen von Teilchen (Turbulenzballen) von verschiedener Temperatur und verschiedener Konzentration zustande.

Wir stellen uns hierbei vor, daß die an die Wand gelangenden Teilchen vollständig die Temperatur t_w der Wand und die dort herrschende Konzentration c_w annehmen. Haben die in der Zeiteinheit aus dem Innern des Gases (t_o, c_o) an die Oberfläche df gelangenden Teilchen das Volumen $V df$, dann transportieren sie, da sich ihre Temperatur um $t_o - t_w$, ihre Konzentration um $c_o - c_w$ ändert, in der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$dQ = V \gamma c_p (t_o - t_w) df \quad (15)$$

und die Stoffmenge

$$dN = V (c_o - c_w) df \quad (16).$$

Durch Vergleich mit Gl. (1) bzw. (2) folgt zunächst

$$\alpha = \gamma c_p \cdot V$$

$$\sigma = V$$

und hieraus $\frac{\alpha}{\sigma} = \gamma c_p$ oder $\epsilon = 1$ (3).

Hiermit ist also das Lewissche Gesetz gefunden.

Lewis²⁾ und Merkel³⁾ haben dieses Gesetz für allgemein gültig angesehen. Die Erfahrung lehrt aber, daß es im allgemeinen nur bei sehr großen Strömungsgeschwindigkeiten, bei denen überwiegend Turbulenz herrscht, erfüllt wird. Bei niedrigeren Geschwindigkeiten hingegen, namentlich im laminaren Strömungsbereich, treten, worauf vor allem Ackermann⁶⁾ hingewiesen hat, merkliche Abweichungen vom Lewisschen Gesetz auf. Man wird von vorneherein vermuten, daß im allgemeinen ein Zusammenhang zwischen α/σ und dem Verhältnis λ/D der Wärmeleitzahl λ zur Diffusionszahl D des Gas-Dampf-Gemisches besteht. Ein Anhalt für diesen Zusammenhang läßt sich aus folgender im wesentlichen ebenfalls von Nusselt⁶⁾ stammenden Überlegung, die an die Grenzschichttheorie anknüpft, gewinnen.

ϵ nach der Grenzschichtentheorie

Wir nehmen zur Vereinfachung an, daß der gesamte Widerstand für den Wärme- und Stoff-Austausch allein in einer laminaren Grenzschicht liegt und in dieser Grenzschicht sowohl die Temperatur wie auch die Konzentration linear verläuft.

Hat die Grenzschicht die Dicke δ , dann folgt für den Wärme- und Stoffaustausch in der Zeiteinheit

$$dQ = \frac{\lambda}{\delta} (t_o - t_w) df \quad (17),$$

$$dN = \frac{D}{\delta} (c_o - c_w) df \quad (18)$$

und hieraus durch Vergleich mit Gl. (1) und (2)

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} \text{ bzw. } \sigma = \frac{D}{\delta} \quad (19, 20).$$

Somit ergibt sich nach dieser vereinfachten Grenzschichtbetrachtung

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\lambda}{D} \text{ oder auch } \epsilon = \frac{\alpha}{\sigma} \quad (21, 22).$$

Da bei laminarer Strömung der Wärmeaustausch und Stoffaustausch im wesentlichen einen Austausch durch eine Grenzschicht darstellen, ist zu vermuten, daß Gl. (21) und (22) mindestens in erster Näherung für die laminare Strömung gelten. Wir gelangen daher auf Grund der bisherigen vereinfachten Überlegungen bereits zu folgendem Ergebnis:

Bei laminarer Strömung ist der Lewissche Koeffizient etwa gleich dem Verhältnis der Temperaturleitzahl zur Diffusionszahl. Bei turbulenten Strömung hingegen strebt der Lewissche Koeffizient mit wachsender Geschwindigkeit, d. h. mit zunehmender Turbulenz, immer mehr dem Wert 1 zu. Das Lewissche Gesetz

⁶⁾ Für den Fall, daß die Rohrwand eine überall gleiche Temperatur hat, kann man beliebig große Temperatur- und Konzentrationsänderungen nach Gleichungen berechnen, die Nesselmann abgeleitet und Hofmann auf die Kühlung von Gas-Dampf-Gemischen angewendet hat. Vgl. K. Nesselmann, Wärme- und Stoffaustausch an Flächen gleicher Temperatur, Z. ges. Kälteind., 48, 181/182 [1941] und E. Hofmann, Über die Berechnung von Kühlein für Gas-Dampf-Gemische, Z. ges. Kälteind., 49, 66/70, 79/82 [1942]. Aus den Betrachtungen von Nesselmann und Hofmann erkennt man, daß bei größeren Temperatur- und Konzentrationsunterschieden grundsätzlich auch dann eine gewisse Übersättigung auftreten kann, wenn $\epsilon = 1$ oder sogar etwas kleiner als 1 ist. Dies folgt auch schon daraus, daß bei $\epsilon = 1$ die Zustandsänderung im Molières t, x -Diagramm durch eine Gerade dargestellt wird und diese im Nebelgebiet verläuft, falls ihr Anfangs- und Endpunkt auf der Sättigungslinie liegen.

⁷⁾ W. Nusselt, Wärmeübergang, Diffusion und Verdunstung, Z. ang. Math. Mech. 10, S. 105/121 [1930], siehe insbes. S. 113.

⁸⁾ G. Ackermann, Das Lewissche Gesetz für das Zusammenwirken von Wärmeübertragung und Verdunstung, Forsch. Ing. Wes. 5, 95/100 [1934].

ist hiernach stets um so genauer erfüllt, je größer die Reynoldssche Zahl ist⁷⁾.

Werte von a/D nach Messungen

Um ein angenehmeres Urteil über die Größe des Lewisschen Koeffizienten im laminaren Gebiet zu erhalten, seien für verschiedene Gas-Dampf-Gemische die Werte des Verhältnisses a/D mitgeteilt. E. Schmidt⁸⁾ hat solche Werte in einer Tabelle zusammengestellt, die nachstehend als Tabelle 1 wiedergegeben sei. Hierbei sind jedoch die Werte von a nach neueren Messungen etwas berichtet.

Tabelle 1
Temperaturleitzahl a nach neueren Messungen und Diffusionskonstante D bei der Diffusion eines Stoffes vom Molekulargewicht m_1 in einem Gas vom Molekulargewicht m_2 bei 0°C und 760 Torr.
(Nach neueren Messungen von a gegenüber den Angaben von E. Schmidt⁸⁾ etwas berichtet.)

Diffusion von	m_1	m_1/m_2	a	D	$\frac{a}{D}$
Isobutylisobutyrat in H ₂	144	72,0	0,489	0,679	7,20
Benzol	78	39,0	0,489	0,1051	4,65
Äthylalkohol	" "	46	0,489	0,1360	3,59
Methylalkohol	" "	32	0,489	0,1800	2,72
Kohlensäure	" "	44	0,489	0,198	2,47
Luft	" "	29	0,489	0,238	2,05
Wasser dampf	" "	18	0,489	0,247	1,98
Isobutylisobutyrat in Luft	144	4,97	0,0668	0,0169	3,95
Benzol	78	2,69	0,0668	0,0270	2,475
Äthylalkohol	" "	46	0,0668	0,0366	1,825
Methylalkohol	" "	32	0,0668	0,0476	1,40
Kohlensäure	" "	44	0,0668	0,0512	1,30
Wasser dampf	" "	18	0,622	0,0712	0,937
Wasserstoff	2	0,069	0,0668	0,266	0,251
Isobutylisobutyrat in CO ₂	144	3,28	0,0319	0,0132	2,42
Benzol	78	1,78	0,0319	0,0190	1,68
Äthylalkohol	" "	46	0,0319	0,0246	1,30
Methylalkohol	" "	32	0,0319	0,0316	1,01
Luft	" "	29	0,0319	0,0512	0,622
Wasser dampf	" "	18	0,0319	0,0475	0,671
Wasserstoff	" "	2	0,045	0,1936	0,165

Bemerkenswert ist nach Tabelle 1, daß z. B. für Wasserdampf in Luft $a/D = 0,937$, also etwas kleiner als 1 ist, daß hingegen für Kohlensäure in Luft $a/D = 1,30$, für Benzol in Luft $a/D = 2,48$ beträgt, also erheblich größer als 1 ist. Besonders hohe Werte von a/D ergeben sich bei Gemischen mit Wasserstoff; für Wasserdampf in Wasserstoff gilt z. B. der Wert $a/D = 1,98$, für Kohlensäure in Wasserstoff $a/D = 2,47$. Werte von derselben Größenordnung nimmt nach obigen Überlegungen auch der Lewissche Koeffizient bei laminarer Strömung an. Bei wasserstoffhaltigen Gemischen ist hiernach in viel höherem Maße Nebelbildung oder Schneien und die Bildung einer lockeren, leicht abbröckelnden Reifschicht zu erwarten als bei Gemischen mit Luft.

Nach Tabelle 1 hängt das Verhältnis a/D hauptsächlich vom Verhältnis m_1/m_2 der Molekulargewichte des Dampfes und des Gases ab. In erster Näherung gilt die empirische Beziehung⁹⁾

$$\frac{a}{D} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (23).$$

Wesentlich genauer lassen sich die Werte in Tabelle 1 wiedergeben durch die Gleichung⁹⁾

$$\frac{a}{D} = \left(1,25 - \frac{1,75}{m_2} \right) \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (24),$$

doch weichen auch von dieser Gleichung verschiedene Versuchswerte in unregelmäßiger Weise ab.

Vereinigung der Grenzschichttheorie mit der Impulstheorie

Einen weiteren Anhaltspunkt dafür, wie sich der Lewissche Koeffizient im turbulenten Gebiet verhält, liefert eine Vereinigung der Grenzschichten- und Impulstheorie, wiederum entsprechend einem von Nusselt⁶⁾ entwickelten Gedankengang.

In einer der Wand anliegenden laminaren Grenzschicht herrschen linearer Temperatur- und Konzentrationsverlauf, wobei die Temperatur von t_e auf t_w , die Konzentration von c_e auf c_w absinkt. t_e und c_e seien somit Temperatur und Konzentration an der der Rohrmitte zugewandten Seite der Grenzschicht. Der Rest des Temperatur- und Konzentrationsunterschiedes entfällt auf den

⁹⁾ Zu denselben Ergebnissen ist auch Ackermann gelangt, und zwar auf Grund der Nusselt'schen Überlegungen; vgl. G. Ackermann: Wärmeübergang und molekulare Stoffübertragung im gleichen Feld bei großen Temperatur- und Partialdruckdifferenzen, VDI-Forschungsheft 382, Berlin 1937, insbes. S. 6 u. 7. Nusselt selbst hat ohne Berücksichtigung des Lewisschen Koeffizienten die zwischen Wärmeübergang und Stoffaustausch geltenden Beziehungen abgeleitet; vgl. W. Nusselt, Fußnote 5.

¹⁰⁾ E. Schmidt, Verdunstung u. Wärmeübergang, Gesundheitsing. 52, 525/29 [1929].

¹¹⁾ Vom Verfasser nach der Tabelle von E. Schmidt empirisch gefunden.

turbulenten Kern, der sich unmittelbar an die Grenzschicht anschließe. In der Grenzschicht gilt jetzt entsprechend Gl. (17) und (18)

$$dQ = \frac{\lambda}{\delta} (t_e - t_w) df \quad (25)$$

und

$$dN = \frac{D}{\delta} (c_e - c_w) df \quad (26),$$

wobei also jetzt t_o und c_o durch t_e und c_e ersetzt sind. Für den turbulenten Kern erhalten wir hingegen entsprechend Gl. (15) und (16)

$$dQ = V \gamma c_p (t_o - t_e) df \quad (27),$$

$$dN = V (c_o - c_e) df \quad (28).$$

Setzt man zuerst die Gl. (1), (25) und (27), dann die Gl. (2), (26) und (28) einander gleich, dann ergibt sich

$$\alpha (t_o - t_w) = \frac{\lambda}{\delta} (t_e - t_w) = V \gamma c_p (t_o - t_e) \quad (29).$$

$$\sigma (c_o - c_w) = \frac{D}{\delta} (c_e - c_w) = V \cdot (c_o - c_e) \quad (30).$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$\frac{t_e - t_w}{t_o - t_w} = A \quad \text{und} \quad \frac{c_e - c_w}{c_o - c_w} = B \quad (31),$$

dann gehen Gl. (29) und (30) über in

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} A = V \gamma c_p (1 - A) \quad (32)$$

$$\sigma = \frac{D}{\delta} B = V \cdot (1 - B) \quad (33).$$

Durch Division folgt hieraus

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\lambda A}{D B} = \gamma c_p \frac{1 - A}{1 - B} \quad (34).$$

Aus dem mittleren und letzten Ausdruck von Gl. (34) ergibt sich nach einer kleinen Umformung

$$\frac{A}{B} = A + (1 - A) \frac{D \gamma c_p}{\lambda} = A + (1 - A) \frac{D}{\lambda} \quad (35),$$

wenn wieder $\alpha = \lambda / \gamma c_p$ die Temperaturleitzahl bedeutet. Mit diesem Wert von A/B erhält man aus dem ersten und mittleren Ausdruck von Gl. (34)

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\lambda}{D} \left[A + (1 - A) \frac{D}{\lambda} \right] \quad (36)$$

und damit für den Lewisschen Koeffizienten unter Berücksichtigung von Gl. (4)

$$\epsilon = A \frac{a}{D} + (1 - A) \quad (37).$$

Für A gibt Prandtl¹⁰⁾ die Beziehung an

$$A = \frac{e}{\sqrt{Re}} + (Pr - 1) e \quad (38),$$

worin Re und Pr die bekannten Kenngrößen des Wärmeüberganges und e eine noch unsicher bestimmte Konstante bedeutet, deren Wert zwischen 1,1 und 1,75 liegt. Beschränken wir uns auf Gase, bei denen man genau genug $Pr = 1$ setzen kann, dann vereinfacht sich Gl. (38) zu

$$A = \frac{e}{\sqrt{Re}} \quad (39).$$

Bei der kritischen Geschwindigkeit, d. h. bei $Re = 2300$, hat nach dieser Gleichung A etwa den Wert 0,5 (bei $e = 1,32$) und nimmt dann mit wachsendem Re ständig ab. Bei $Re \rightarrow \infty$ wird nach Gl. (39) $A \rightarrow 0$ und damit $\epsilon \rightarrow 1$, wie wir es schon erwartet haben. Mit $A = 0,5$ liefert Gl. (35) für die kritische Geschwindigkeit die Näherungsgleichung

$$\epsilon = \epsilon_kr = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{D} + 1 \right) \quad (40).$$

Tabelle 2 enthält Werte für $\epsilon = \epsilon_{kr}$, die nach Gl. 40 für verschiedene Beträge a/D berechnet sind. Die letzte Zahlenreihe wird später besprochen.

Tabelle 2

Lewisscher Koeffizient $\epsilon = \epsilon_{kr}$ bei turbulenten Strömung unmittelbar oberhalb der kritischen Reynoldsschen Zahl nach Gl. (40) und (49)

$\frac{a}{D}$	1	2	3	4
$\epsilon = \epsilon_{kr}$ nach Gl. (40)	1	1,5	2	2,5
$\epsilon = \epsilon_{kr}$ nach Gl. (49)	1	1,59	2,08	2,52

Hierach können wir jetzt unser Bild, das wir über den Lewisschen Koeffizienten im turbulenten Gebiet gewonnen haben, etwa wie folgt erweitern: Während im laminaren Gebiet ϵ etwa den-

¹⁰⁾ W. Prandtl, Bemerkung über den Wärmeübergang im Rohr. Physik. Z. 29, 487 [1928]; vgl. auch W. Nusselt, Fußnote 5.

selben Wert wie a/D hat, fällt bei Überschreiten der kritischen Reynoldsschen Zahl ϵ plötzlich ungefähr auf den Mittelwert zwischen a/D und 1 ab. Mit weiter wachsender Reynoldsscher Zahl nähert sich dann ϵ unbegrenzt dem Wert 1.

Verhalten des Lewisschen Koeffizienten nach der Ähnlichkeitstheorie

Da die bisherigen Ableitungen sehr vereinfacht und entsprechend die Ergebnisse recht unsicher sind, wollen wir versuchen, aus der Ähnlichkeitstheorie weitere Anhaltspunkte über das Verhalten des Lewisschen Koeffizienten zu gewinnen.

Für Diffusionsvorgänge in strömenden Medien gelten genau dieselben Differentialgleichungen wie für die Wärmeleitung in strömenden Medien, wobei lediglich die Konzentration c an die Stelle der Temperatur t und die Diffusionszahl D an die Stelle der Temperaturleitzahl a tritt. In beiden Fällen müssen daher unter gleichen Anfangsbedingungen die Differentialgleichungen auch dieselben Lösungen haben. Die für die Wärmeübertragung auf Grund von Messungen bekannten Gleichungen kann man als angenäherte Lösungen betrachten, die meist mit Hilfe der Ähnlichkeitstheorie in empirische Gleichungen der Gestalt:

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = \text{Nu} = \text{const} \cdot F(\text{Re}) \cdot f(\text{Pr}) \cdot \varphi\left(\frac{L}{d}\right) \quad (41)$$

gebracht worden sind, worin F , f und φ zunächst willkürliche Funktionen bedeuten. Im Falle der Diffusion ist, wie erwähnt, $\lambda/\gamma c_p = a$ durch D , also $\text{Pr} = v/a$ durch v/D , und ferner $\alpha/\gamma c_p$ durch die Stoffaustauschzahl σ zu ersetzen¹¹⁾. v ist die kinematische Zähigkeit. Für den Stoffaustausch muß daher mit denselben Funktionen wie in Gl. (41) und mit demselben Wert der Konstanten die Beziehung

$$\frac{\sigma d}{D} = \text{const} \cdot F(\text{Re}) \cdot f\left(\frac{v}{D}\right) \cdot \varphi\left(\frac{L}{d}\right) \quad (42)$$

eine Näherungs-Lösung der Differentialgleichungen sein. Hierach erhalten wir zunächst allgemein für den Lewisschen Koeffizienten nach Gl. (4), indem wir Gl. (41) durch Gl. (42) dividieren,

$$\epsilon = \frac{\alpha}{\sigma \gamma c_p} = \frac{a}{D} \cdot \frac{f(v/a)}{f(v/D)} \quad (43).$$

In den bekannten Potenzbeziehungen für den Wärmeübergang wird $f(\text{Pr})$ gleich einer Potenz

$$f(\text{Pr}) = \text{Pr}^n \quad (44)$$

gesetzt, wie beispielsweise folgende Gleichungen zeigen. Es gilt für das turbulente Strömungsgebiet nach Kraufbold¹²⁾:

$$\text{Nu} = 0,032 \text{ Re}^{0,8} \text{ Pr}^n \left(\frac{d}{L}\right)^{0,054} \quad (45)$$

mit $n = 0,37$ bei Beheizung, $n = 0,3$ bei Kühlung der Flüssigkeit, nach Hausen¹³⁾

$$\text{Nu} = 0,116 (\text{Re} - 125) \text{ Pr}^{1/3} \left(1 + \left(\frac{d}{L}\right)^{2/3}\right) \left(\frac{\eta_f}{\eta_w}\right)^{0,14} \quad (46),$$

und als gute Näherung für das laminare Gebiet nach Léveque¹⁴⁾

$$\text{Nu} = 1,62 \left(\frac{\text{Pe} \cdot d}{L}\right)^{1/3} = 1,62 \left(\frac{\text{Re} \cdot d}{L}\right)^{1/3} \cdot \text{Pr}^{1/3} \quad (47).$$

Pe bedeutet die Peletsche Kennzahl. In allen diesen Gleichungen hat also $f(\text{Pr})$ die durch Gl. (44) bestimmte Gestalt, wobei n sowohl für die laminare wie auch für die turbulente Strömung etwa den Mittelwert $n = 1/3$ hat. Mit Gl. (44) geht Gl. (43) über in

$$\epsilon = \frac{a}{D} \cdot \frac{\left(\frac{v}{a}\right)^n}{\left(\frac{v}{D}\right)^n} = \left(\frac{a}{D}\right)^{1-n} \quad (48).$$

Mit $n = 1/3$ folgt hieraus

$$\epsilon = \left(\frac{a}{D}\right)^{-2/3} \quad (49).$$

Es ergeben sich hierach, wie die letzte Reihe von Tabelle 2 zeigt, ungefähr dieselben Werte, wie wir sie früher für die turbulente Strömung unmittelbar oberhalb der kritischen Reynoldsschen Zahl gefunden hatten. Die Größenordnung von ϵ ist hierach im Mittel dieselbe wie nach den obigen Betrachtungen; doch ist das Ergebnis jetzt insofern anders, als nach der Ähnlichkeitstheorie ϵ nicht nur für laminare und turbulente Strömung gleich groß, sondern im turbulenten Gebiet auch unabhängig von Re sein soll. Vor allem fehlt jetzt die nach allen anderen Theorien sich ergebende Annäherung des Lewisschen Koeffizienten an den Wert 1 mit wachsender Reynoldsscher Zahl.

¹¹⁾ Näheres hierüber siehe W. Nusselt, Fußnote 5, und E. Schmidt, Fußnote 8.

¹²⁾ H. Kraufbold, Die Wärmeübertragung an Flüssigkeiten in Rohren bei turbulenten Strömung. Forsch. Ing. W., 39, 44 [1933].

¹³⁾ H. Hausen, Darstellung des Wärmeüberganges in Rohren durch verallgemeinerte Potenzbeziehungen. Z. Ver. dtsc. Ing.-Beih. Verfahrenstechnik [1943] 91, 98.

¹⁴⁾ M. A. Léveque, Les lois de la transmission de la chaleur par convection. Ann. mines (12) 13, 201, 305, 381 [1928].

Der Grund hierfür dürfte wohl darin zu suchen sein, daß der Ansatz (41), wie er bei allen Potenzbeziehungen benutzt wird, nicht genau richtig ist. Streng genommen ist es vermutlich nicht möglich, in der Wärmeübergangsgleichung einen Faktor $f(Pr)$ abzuspalten, der nur von Pr abhängt. Es wird vielmehr der Faktor, der den Einfluß der Prandtl'schen Kenngröße zum Ausdruck bringt, in gewissem Grade auch noch von Re abhängen. Schreiben wir daher $f(Pr, Re)$ statt $f(Pr)$, dann erhalten wir statt Gl. (43) allgemeiner

$$\varepsilon = \frac{a}{D} \cdot \frac{f\left(\frac{v}{a}, Re\right)}{f\left(\frac{v}{D}, Re\right)} \quad (50)$$

In der Wärmeübergangsgleichung von Prandtl-Hofmann¹⁵⁾ für turbulente Strömung

$$Nu = \frac{0,0395 Re^{3/4} Pr}{1 + 1,5 Re^{-1/8} Pr^{-1/6} (Pr-1)} \quad (51)$$

nimmt z. B. die Funktion $f(Pr, Re)$ die Gestalt an

$$f(Pr, Re) = \frac{Pr}{1 + 1,5 Re^{-1/8} Pr^{-1/6} (Pr-1)} \quad (52)$$

Wir erhalten hiermit nach Gl. (50) mit $Pr = v/a$

$$\varepsilon = \frac{1 + 1,5 Re^{-1/8} \left(\frac{v}{D}\right)^{-1/6} \left(\frac{v}{D}-1\right)}{1 + 1,5 Re^{-1/8} \left(\frac{v}{a}\right)^{-1/6} \left(\frac{v}{a}-1\right)} \quad (53)$$

Man erkennt sofort, daß diese Gleichung die theoretische Forderung erfüllt, daß ε bei $Re = \infty$ gleich 1 wird. Bei $Pr = v/a = 1$ nimmt Gl. (53) die einfachere Gestalt an

$$\varepsilon = 1 + 1,5 Re^{-1/8} \left(\frac{a}{D}\right)^{-1/6} \left(\frac{a}{D}-1\right) \quad (54)$$

Bei $Re = Re_{kr} = 2300$ hat hiernach ε die Werte nach Tabelle 3.

Tabelle 3

Lewisscher Koeffizient $\varepsilon = \varepsilon_{kr}$ bei turbulenten Strömung bei der kritischen Reynoldsschen Zahl nach Gl. (54).

$\frac{a}{D}$	1	2	3	4
$\varepsilon = \varepsilon_{kr}$	1	1,51	1,95	2,35

Wie der Vergleich mit Tabelle 2 zeigt, ergeben sich nur wenig kleinere Werte als nach Gl. (40) und (49). Wie ferner ε bei $Pr = 1$ von Re sowohl nach Gl. (37) und (39) als auch nach Gl. (54) abhängt, zeigt Tabelle 4 für $a/D = 2$ und $a/D = 4$. Man ersieht hieraus deutlich die Abnahme von ε mit wachsendem Re , doch erfolgt diese ziemlich langsam. Diese langsame Abnahme dürfte auch der Grund sein, weshalb bei den Potenzbeziehungen für den Wärmeübergang (vgl. Gl. 41, 45, 46 und 47) die streng genommen nicht zulässige Abspaltung eines Faktors, der nur von Pr allein abhängt, innerhalb der Versuchsgenauigkeit sich trotzdem als hinreichend genau erwiesen hat. Man könnte indessen auch bei diesen Potenzbeziehungen ungefähr dieselbe Abhängigkeit des Lewisschen Koeffizienten von Re wie nach Gl. (54) erreichen, indem man in Gl. (44) und (48) n nicht als konstant betrachtet, sondern

$$n = 1 - \frac{1,3}{Re^{0,1}}$$

setzt¹⁶⁾.

Der Lewissche Koeffizient erweist sich hiernach noch als ein sehr empfindliches Mittel zur Prüfung von Wärmeübergangsgleichungen. Umgekehrt aber folgt hieraus, daß man den Lewisschen Koeffizienten aus diesen Gleichungen, wenn sie nicht ungewöhnlich genau sind, nur sehr angenähert ermitteln kann.

Tabelle 4

Lewisscher Koeffizient ε bei turbulenten Strömung bei $a/D = 2$ und $a/D = 4$ abhängig von Re nach Gl. (37), (39) und (54).

Re	$a/D = 2$		$a/D = 4$	
	nach Gl. (37) u. (39)	nach Gl. (54)	nach Gl. (37) u. (39)	nach Gl. (54)
2300	1,50	1,51	2,50	2,35
10000	1,42	1,42	2,25	2,13
100000	1,31	1,32	1,94	1,85
1000000	1,23	1,24	1,70	1,63

Genauere Ermittlung der Lewisschen Zahl für das laminare Gebiet

Die erwähnte Gl. (47) von Léveque für laminare Strömung gilt streng genommen nur für den Beginn der thermischen Anlauf-

¹⁵⁾ Vgl. E. Hofmann, Der Wärmeübergang bei der Strömung im Rohr. Z. ges. Kälteind., 44, 99-107 [1937].

¹⁶⁾ Auch Nusselt und später Lorenz haben schon darauf hingewiesen, daß die gemessenen Wärmeübergangszahlen auf eine langsame Zunahme von ε mit wachsendem Re schließen lassen. Vgl. W. Nusselt, Die Wärmeübertragung an Wasser im Rohr, Festchrift 2. Jahrhundert, d. Techn. Hochsch. Karlsruhe 1925; H. Lorenz, Beitrag zum Problem d. Wärmeübergangs in turbulenten Strömung, Z. techn. Physik 15, 155-162, 201-206 [1934], insbes. S. 205.

strecke, näherungsweise allerdings auch in einem größeren Bereich. Den gesamten Bereich umfaßt auf Grund von Berechnungen nach der Nusseltschen Theorie¹⁷⁾ folgende Gleichung des Verfassers¹⁸⁾

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = 3,65 + \frac{0,0668 \frac{Pe \cdot d}{L}}{1 + 0,045 \left(\frac{Pe \cdot d}{L}\right)^{2/3}} = f\left(\frac{Pe \cdot d}{L}\right) \quad (55),$$

worin $f\left(\frac{Pe \cdot d}{L}\right) = f\left(\frac{vd^2}{aL}\right)$ zur Abkürzung für die in Gl. (55) stehende Funktion von $Pe \cdot d/L$ gesetzt ist. Entsprechend haben wir nach der Ähnlichkeitstheorie für den Stoffaustausch zu schreiben:

$$\frac{\sigma d}{D} = 3,65 + \frac{0,0668 \frac{vd^2}{DL}}{1 + 0,045 \left(\frac{vd^2}{DL}\right)^{2/3}} = f\left(\frac{Pe \cdot d}{L} \cdot \frac{a}{D}\right) \quad (56).$$

Durch Division von Gl. (55) durch (56) folgt

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\gamma c_p \sigma} = \frac{a}{D} \cdot \frac{f\left(\frac{Pe \cdot d}{L}\right)}{f\left(\frac{Pe \cdot d}{L} \cdot \frac{a}{D}\right)} \quad (57).$$

Für sehr große Werte von $Pe \cdot d/L$, d. h. für den Beginn der Anlaufstrecke, wird nach Gl. (55) $f\left(\frac{Pe \cdot d}{L}\right) = \left(\frac{Pe \cdot d}{L}\right)^{2/3}$ und damit nach Gl. (57) in Übereinstimmung mit dem bereits aus der Gleichung von Léveque erhaltenen Ergebnis:

$$\varepsilon = \left(\frac{a}{D}\right)^{2/3} \quad (\text{Beginn der therm. Anlaufstrecke}) \quad (58).$$

Für sehr kleine Werte von $Pe \cdot d/L$, d. h. für das Ende der thermischen Anlaufstrecke, wird hingegen nach Gl. (56) $f\left(\frac{Pe \cdot d}{L}\right) = 3,65$ und damit nach Gl. (57)

$$\varepsilon = a/D \quad (\text{thermisch ausgebildete Strömung}). \quad (59).$$

Aus diesen Überlegungen folgt also, daß ε in der thermischen Anlaufstrecke von $\varepsilon = (a/D)^{2/3}$ bis $\varepsilon = a/D$ zunimmt. Wie hierbei der Wert von ε nach Gl. (57) von $L/Pe \cdot d$ abhängt, zeigt Tabelle 5 für das Beispiel: $a/D = 2$, was sehr angenähert für Wasserdampf als kondensierenden Bestandteil in Wasserstoff zutrifft. Der angegebene Wert von ε ist der Mittelwert in einem Rohr von der jeweiligen Länge L , die bei $L/Pe \cdot d < 0,05$ kürzer als die thermische Anlaufstrecke ist. Praktisch ist das Rohr fast immer kürzer als die thermische Anlaufstrecke oder wenigstens so kurz ($L/Pe \cdot d < 1$), daß sich die thermische Anlaufstrecke im Wert von $Nu (> 3,65)$ noch bemerkbar macht.

Tabelle 5
ε abhängig von $L/Pe \cdot d$ bei laminarer Strömung.
Beispiel: $a/D = 2$ (Wasserdampf in Wasserstoff)

$\frac{L}{Pe \cdot d}$	$\frac{Pe \cdot d}{L}$	$f\left(\frac{Pe \cdot d}{L}\right)$	$f\left(\frac{Pe \cdot d}{L} \cdot \frac{a}{D}\right)$	ε
0,001	1000	15,79	20,06	1,58
0,01	100	7,04	8,92	1,58
0,1	10	4,20	4,65	1,81
1,0	1	3,71	3,77	1,97

Bei diesen Betrachtungen ist ebenso wie bei der Theorie von Nusselt vorausgesetzt, daß schon von Beginn der thermischen Anlaufstrecke an die Strömung hydrodynamisch ausgebildet ist, also die hydrodynamische Anlaufstrecke vom strömenden Medium schon vor Beginn der Kühlung zurückgelegt ist. Wird hingegen schon in der hydrodynamischen Anlaufstrecke gekühlt, dann kann ε andere Werte haben als bei hydrodynamisch ausgebildeter Strömung, und zwar vermutlich in dem Sinne, daß ε noch näher an 1 liegt. Doch bedarf diese Frage noch einer gesonderten Untersuchung.

Bei Röhren, deren Innen-Durchmesser mehr als etwa 1 cm beträgt, ist bei laminarer Strömung auch ein gewisser Einfluß freier Konvektion zu erwarten. Für freie Konvektionen an ebenen Platten sowie auch an Röhren gilt mit guter Näherung die Beziehung¹⁹⁾

$$\frac{\alpha \cdot l}{\lambda} = Nu = \text{const.} \sqrt[4]{Gr \cdot Pr} = \text{const.} \sqrt[4]{Gr} \cdot \sqrt[4]{\frac{v}{a}} \quad (60),$$

worin l eine kennzeichnende Länge und Gr die Grashof'sche Kenngröße bedeuten. Entsprechend muß für den Stoffaustausch, unter der Annahme, daß Gr in beiden Fällen denselben Wert hat, gelten

$$\frac{\sigma l}{D} = \text{const.} \sqrt[4]{Gr} \cdot \sqrt[4]{\frac{v}{D}} \quad (61).$$

Aus Gl. (60) und (61) folgt

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\gamma \sigma c_p} = \frac{a^4 \sqrt{\frac{D}{a}}}{D} = \left(\frac{a}{D}\right)^{3/4} \quad (62).$$

¹⁷⁾ W. Nusselt, Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge. Z. Ver. dtsch. Ing. 54, 1154/58 [1910].

¹⁸⁾ Siehe z. B. H. Lorenz, Die Wärmeübertragung an einer ebenen senkrechten Platte an Öl bei natürlicher Konvektion. Z. techn. Physik. 15, 362/66 [1934].

*Eichkorn*¹⁹⁾ hat festgestellt, daß bei kurzen Rohren, die gewissermaßen ganz im Anlaufgebiet der freien Konvektion liegen, der Exponent von Gr. Pr in Gl. (60) und (61) in einem kleinen Bereich bis gegen 1 anwachsen kann. In diesem Falle würde auch ϵ sich stark dem Wert 1 nähern.

Wir gelangen somit für die laminare Strömung zu folgendem Ergebnis: Ist die Strömung hydrodynamisch und thermisch voll ausgebildet und auch sonst ungestört, dann ist $\epsilon = a/D$. Je mehr man sich aber noch in der thermischen und wahrscheinlich auch hydrodynamischen Anlaufstrecke befindet, um so mehr weicht ϵ von a/D ab, und zwar in dem Sinne, daß ϵ etwas mehr dem Wert 1 zustrebt. Im gleichen Sinne wirken eine übergelagerte freie Konvektion und vermutlich auch etwaige andere Störungen der rein laminaren Strömungen, wie noch nicht ganz abgeklungene Einlaufwirbel und dergl. Es ist nicht ausgeschlossen, daß das Zusammentreffen mehrerer solcher Einflüsse eine starke Annäherung von ϵ an den Wert 1 herbeiführen kann. Die früher besprochenen Unterschiede zwischen den verschiedenen Gas-Dampfgemischen, die durch das Verhältnis a/D bedingt sind, könnten hierdurch fast vollständig verwischt werden. Sehen wir aber von solchen Störungen ab, dann werden wir auch jetzt noch ein Kennzeichen der laminaren Strömung darin erblicken, daß ϵ im allgemeinen näher an a/D liegt als bei turbulenter Strömung.

Bestätigung der gewonnenen Ergebnisse durch Versuche

Aus den früheren Betrachtungen ergab sich im wesentlichen, daß der *Lewissche Koeffizient* ϵ bei laminarer Strömung etwa gleich oder nahe dem Verhältnis a/D der Temperaturleitzahl a zur Diffusionszahl D ist. Bei turbulenter Strömung liegt er hingegen näher an 1.

Ist nun a/D erheblich größer als 1, dann ist im laminaren Gebiet auch ϵ erheblich größer als 1. In diesem Falle kann bei Anwesenheit einer genügenden Anzahl von Kondensationskernen Nebel oder Schnee im gesamten Rohrquerschnitt auftreten. An der Rohrwand wird sich nur ein lockerer Belag bilden. Im turbulenten Gebiet ist hingegen, weil ϵ näher an 1 liegt, Nebel oder Schneebildung nur in geringem Maße zu erwarten, sofern sie nicht unter Aufrechterhaltung der Übersättigung überhaupt unterbleibt. Hierfür spricht auch die Überlegung, daß selbst bei gleicher Übersättigung und einer gleichen Anzahl von Kondensationskernen die Nebel- oder Schneebildung um so unwahrscheinlicher wird, je kürzer die verfügbare Zeit, d. h. je höher die Strömungsgeschwindigkeit ist. Im turbulenten Gebiet muß ferner die Reifsicht an der Rohrwand viel fester sein als im laminaren, weil die Ausscheidung im wesentlichen an der Rohrwand selbst stattfindet. Dies wird vermutlich auch dadurch begünstigt, daß bei turbulenter Strömung in der Zeiteinheit mehr Dampf niedergeschlagen wird. Denn *Schropp*²⁰⁾ hat bei Versuchen über die Reifausscheidung aus ruhender Luft festgestellt, daß die Reifsicht um so dichter ist, je rascher sie sich bildet.

Ist $a/D \leq 1$, dann ist durchweg auch $\epsilon \leq 1$. Dann kann weder im laminaren noch im turbulenten Gebiet Nebel oder Schnee auftreten, es kann sich vielmehr der Reif nur an der Rohrwand selbst als ziemlich dichter Belag bilden.

Diese Erwartungen werden durch die Versuche, die *Hiltz*¹⁾ mit seiner ersten Apparatur ausführte, bestätigt. Das Gas-Dampfgemisch strömte durch einen Ringraum, der innen durch ein Kühlrohr, außen durch ein doppelwandiges Glasrohr begrenzt war. Die Vorgänge beim Ausfrieren des Dampfes konnten daher von außen beobachtet werden. *Hiltz* arbeitete mit folgenden Gemischen:

$$\begin{array}{ll} \text{Benzol-Stickstoff} & a/D = 2,48, \\ \text{Wasserdampf-Wasserstoff} & a/D = 1,98, \\ \text{Wasserdampf-Luft} & a/D = 0,937. \end{array}$$

Nach dem Gesagten ist also bei Benzol-Stickstoff- und Wasserdampf-Wasserstoff-Gemischen, sofern sie eine hinreichende Zahl von Kondensationskernen enthalten, im laminaren Gebiet starke Nebel- oder Schneebildung zu erwarten. Bei Wasserdampf-Luft-Gemischen hingegen kann sich im laminaren Gebiet ebenso wie im

¹⁹⁾ H. Eichkorn: Über die Wärmeübertragung in senkrechten zylindrischen Gasschichten bei freier Konvektion, Diss. Karlsruhe 1939.

²⁰⁾ K. Schropp, Untersuchungen über die Tau- und Reifbildung an Kühlrohren in ruhender Luft und ihr Einfluß auf die Kälteübertragung. Z. ges. Kälteind. 42, 81/85, 126/31, 151/54 (1935).

turbulenten nur ein ziemlich fester Belag an der Rohrwand bilden.

In der Zusammenfassung seiner Arbeit schreibt *Hiltz* über die Beobachtungen an seiner ersten Apparatur: „Bei den Versuchen ... zeigte sich, daß die Bildung lockeren Schnees durch laminare Strömungsform begünstigt wird. Der Schnee wird bei Benzol-Stickstoff-Gemischen von Gasstrom mitgerissen. Auch in dem trüben, nebligen Gasstrom selbst bildeten sich sehr feine Kristallnadeln von höchstens 0,5 mm Länge. Bei turbulenten Strömung wird der Schnee ausschließlich auf dem Kühlrohr abgeschieden und bleibt fest haften. Der Belag auf dem Kühlrohr ist ziemlich glatt aus feinen, regelmäßig gerichteten Kristallen zusammengesetzt. Versuche mit Wasserdampf-Luft bei gleichen Verhältnissen führten wider Erwarten auch bei laminarer Strömung zu starkem Anfrieren an der Rohrwand.“

In der Abhandlung selbst bemerkt *Hiltz* zu seinen Versuchen mit Benzol-Stickstoff-Gemischen: „... bei laminarer Strömungsform fällt fortgesetzter Benzolschnee herab und läuft sich am Rohrende auf. Im Rohr herrscht starker Nebel ... Der Schnee rutschte hauptsächlich lawinenartig von der Wandung ab. Bei Turbulenz waren die Erscheinungen vollständig andere. Die gesamte Schneoberfläche ... sieht glatt aus. Der Schnee blieb bei sämtlichen Versuchen im turbulenten Strömungsbereich an der Wandung des Kühlrohrs haften und ist überhaupt nicht abgefallen. Es trat keine Nebelbildung auf.“

*Hiltz*¹⁾ hat seine Beobachtung, daß Wasserdampf-Luft-Gemische sich im laminaren Gebiet anders verhalten als Gemische aus Benzol-Stickstoff bzw. Wasserdampf-Wasserstoff, offenbar nicht für glaubwürdig gehalten, weil er sich diesen Unterschied nicht erklären konnte. Er schreibt hierüber: „Dies unerwartete Ergebnis wurde auf die Mängel der ersten Apparatur (geringe Kühlfläche, äußere Wärmezufuhr) zurückgeführt. Deshalb wurde die zweite Apparatur gebaut. Der Gasstrom wurde im Innern geführt. Die Kühlung erfolgte von außen.“ Diese zweite Apparatur gestattete nur eine Beobachtung in der Längsrichtung, während bei einer dritten Apparatur die Ausscheidungsvorgänge nur durch Messung der Feuchtigkeit vor und nach der Versuchsstrecke erfolgt, aber nicht unmittelbar beobachtet werden konnten.

Die wichtigsten Versuchsergebnisse, die mit der zweiten Apparatur gewonnen wurden, sind folgende: „Bei sämtlichen Versuchen mit laminarer Strömung — auch bei H_2O -Luft — trat die erwartete Bildung lockeren Schnees an der Wandung und im Gasstrom ein... Bei den Gemischen $C_6H_5N_2$, sowie $H_2O \cdot H_2$, ist das Rohr schließlich stets zugewachsen. Bei den Versuchen mit H_2O -Luft war dies nicht der Fall... Bei Versuchen mit turbulenter Strömung ist das Rohr regelmäßig zugefroren. Bei Versuchen mit verringriger Feuchtigkeit ist der Schnee auch bei laminarer Strömung von der Wand nur selten abgefallen.“

Es zeigen sich also auch bei diesen späteren Versuchen gewisse Unterschiede zwischen der laminaren und turbulenten Strömung einerseits und zwischen dem Wasserdampf-Luft-Gemisch und den anderen Gemischen anderseits. Doch lassen sich die Erscheinungen nicht so klar theoretisch deuten, wie bei der ersten Apparatur.

Auch im Laboratorium der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen in Höllriegelskreuth bei München sind noch unveröffentlichte Beobachtungen ähnlicher Art über das Ausfrieren von Benzol aus Gemischen mit Gasen angestellt worden. Als Einfluß der Gasart ergab sich hierbei, daß Wasserstoff vor Leuchtgas und dieses wiederum vor Stickstoff eine Nebelbildung und ein lockeres Haften begünstigt. Auch dieses Ergebnis bestätigt nach Zahlentafel 1 die theoretische Forderung, daß Nebel oder Schnee sich umso leichter bildet und die Reifsicht an der Wand um so lockiger wird, je größer der *Lewissche Koeffizient* ist.

Im großen und ganzen dürfte hiernach auch durch die Versuche von *Hiltz* erwiesen sein, daß der *Lewissche Koeffizient* auf die Art des Ausfrierens einen wesentlichen Einfluß hat und daher bei derartigen Betrachtungen nicht außer Acht gelassen werden darf. Freilich wird der *Lewissche Koeffizient* nicht alles erklären können, und zwar auch dann nicht, wenn es unter Vervollkommenung der Theorie gelingt, seinen Wert erheblich genauer anzugeben, als es im vorstehenden möglich war. So kann, wie schon hervorgehoben, die Geschwindigkeit der Bildung der Reifsicht einen wesentlichen Einfluß auf ihre Festigkeit haben. Auch die Temperatur dieser Schicht, d. h. das Maß ihrer Unterkühlung unter ihre Gefriertemperatur, die Beschaffenheit der Rohrwand, sowie besonders die Eigenschaften der entstehenden Krystalle können merkliche Unterschiede im Aufbau und in der Festigkeit der Reifsicht bedingen. Vermutlich werden sich daher auch aus den Gesetzen der Krystallisation noch wertvolle Anhaltspunkte gewinnen lassen. Vor allem aber werden zur Klärung der reichlich verwickelten Vorgänge der Reifausscheidung noch umfangreiche Versuche erforderlich sein.